

# Системы поддержки принятия решений

## 8. Метод анализа иерархий



# Метод анализа иерархий (МАИ)

МАИ не предполагает получение решающего правила, которым пользуется ЛПР при принятии решений; он заключается в сравнении существующих альтернатив на основе предпочтений ЛПР. Этот метод применим к системам, структурные функциональные элементы которых могут быть организованы в иерархию. Будем считать, что элементы в каждой группе независимы.

Постановка задачи:

*Дано:* общая цель (цели) решения задачи;  $N$  критериев;  $k$  альтернатив.

*Требуется:* выбрать наилучшую альтернативу.

Этапы решения задачи при использовании МАИ:

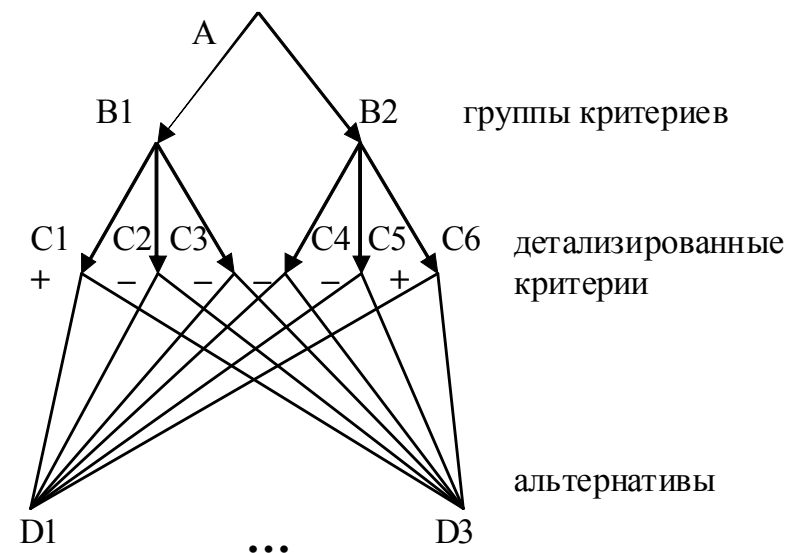
1. Структуризация задачи в виде иерархии.
2. Попарные сравнения элементов каждого уровня для определения относительной важности критериев.
3. Вычисление коэффициентов важности для элементов каждого уровня.
4. Расчет количественного индикатора качества каждой альтернативы и определение лучшей альтернативы.

# Структуризация задачи

Этот этап слабо формализован. Общий подход такой:

- разбить критерии на группы;
- детализировать каждую группу;
- определить влияние детализированных критериев на альтернативы (+/-).

Построить иерархию:



## Определение весов критериев

Способы могут быть различными. Определяются веса всех дуг (критериев) и сравнительные веса всех дуг (AB1 и AB2, B1C1 и B1C2 и т.д.).



# Проставление критериальных оценок

Сначала каждая альтернатива оценивается по каждому критерию в соответствующих единицах измерения (доход – в рублях, время – в часах и т.д.). Затем разрабатываются шкалы критериальных оценок для каждого критерия, например:

доход:	> 20000	– отлично (5)
	15000 – 20000	– хорошо (4)
	8000 – 15000	– удовлетворительно (3)
	5000 – 8000	– плохо (2)
	< 5000	– очень плохо (1)

По этим шкалам все значения переводятся в критериальные оценки (баллы).



# Расчеты

СППР проверяет согласованность оценок. Если её не наблюдается, то проводится согласование, например, с помощью нахождения главного собственного вектора матрицы попарного сравнения критериев.

Расчет можно выполнять с помощью нечеткой логики, т.к. критериальные оценки выставляются в виде лингвистических переменных. Обозначим вес пути (дуги  $lij$ ) через

$$\pi(l_{ij}) = \frac{\mu_A(l_{ij})}{\sum_j \mu_A(l_{ij})}$$

Для попарных сравнений дуг оценка может оказаться несогласованной. Но существуют способы согласования матриц, самый точный – нахождение главного собственного вектора матрицы, который после нормализации становится вектором приоритетов.

Пусть  $A$  – матрица  $n \times n$ . Вектор  $x \in V_n$ ,  $x \neq 0$ , для которого  $Ax = \lambda x$ , где  $\lambda$  – некоторое число, называется собственным вектором  $A$ , и  $\lambda$  – собственным значением матрицы  $A$ . Уравнение  $Ax = \lambda x$  эквивалентно уравнению  $(A - \lambda E)x = 0$ . Это однородная система линейных уравнений, нетривиальные решения которой являются искомыми собственными векторами. Эти решения существуют, если определитель  $\det(A - \lambda E) = 0$ . Это сложно вычислить.

# Расчеты (продолжение)

Более простой способ: сравнивать дуги попарно и заполнять матрицу  $A=(a_{ij})$ , где  $a_{ij}$  – отношение между  $i$ -м и  $j$ -м объектом (критериями). Матрица строится по следующим правилам:

1. если  $a_{ij} = b$ , то  $a_{ji} = 1/b$  при  $b \neq 0$ ;
2.  $a_{ii} = 1$ .

Суммируем элементы каждой строки и нормируем делением суммы на общую сумму элементов. При этом  $i$ -й элемент результирующего вектора будет весом (приоритетом)  $i$ -го критерия. Сумма полученных результатов равна 1.

Вес пути в графе подсчитывается как произведение весов дуг.

Оценка решений – это результат умножения весов дуг последнего уровня (от детализированных критериев к альтернативам) на вектор весов вершин предпоследнего уровня графа ППР:

$$\begin{bmatrix} \pm \pi(C_1 D_1) & \pm \pi(C_2 D_1) & \dots & \pm \pi(C_m D_1) \\ \pm \pi(C_1 D_2) & \pm \pi(C_2 D_2) & \dots & \pm \pi(C_m D_2) \\ & & \dots & \\ \pm \pi(C_1 D_k) & \pm \pi(C_2 D_k) & \dots & \pm \pi(C_m D_k) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \pi(AC_1) \\ \pi(AC_2) \\ \dots \\ \pi(AC_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi(D_1) \\ \chi(D_2) \\ \dots \\ \chi(D_k) \end{bmatrix}$$

где  $\chi(D_i)$  – вес  $i$ -й конечной вершины ( $i$ -й альтернативы),  $m$  – количество детализированных критериев,  $k$  – количество альтернатив.

# Пример: строительство переправы через реку

Начальные условия: существует паром, рассматривается целесообразность строительства моста или тоннеля.

Группы критериев:

V1: экономические

V2: социальные

V3: экологические

Детализация критериев:

C1 – доходы населения

C2 – капиталовложения в строительство

C3 – экономия времени шоферами

C4 – развитие торговли на переправе

C5 – рабочие места

C6 – раскол общины

C7 – изменение стиля жизни

C8 – загрязнение воды

C9 – загазованность воздуха

+ - положительное влияние

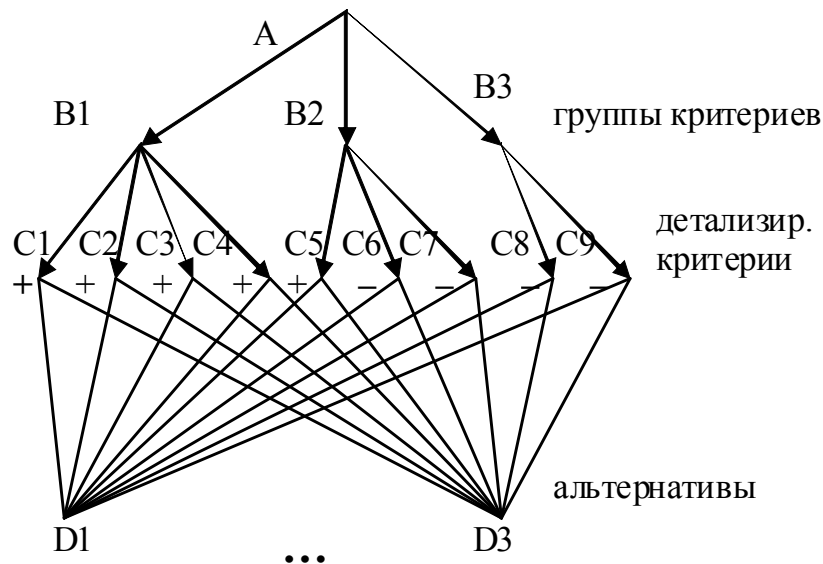
- - отрицательное влияние

Альтернативы:

D1 – строительство моста

D2 – строительство туннеля

D3 – использование существующего парома



# Значения критериев

Критерий	оценки	Альтернативы	Дуга
Размеры доходов ( + )			
> 100000	отлично	D2	C1D2
от 90000	хорошо	D1	C1D1
от 70000	удовлетворительно		
от 40000	плохо		
менее 40000	очень плохо	D3	C1D3
Капиталовложения ( + )			
до 10 млн.	отлично	D3	C2D3
до 12 млн.	хорошо		
до 15 млн.	удовлетворительно		
до 20 млн.	плохо	D1	C2D1
более 20 млн.	очень плохо	D2	C2D2
Экономия времени ( + )			
40 мин. и более	отлично	D2	C3D1
от 30 мин.	хорошо	D1	C3D2
от 20 мин.	удовлетворительно		
от 10 мин.	плохо		
менее 10 мин.	очень плохо	D3	C3D3



# Значения критериев

Критерий	оценки	Альтернативы	Дуга
Развитие торговли (количество магазинов) ( + )			
4 и более	отлично	D1	C4D1
3	хорошо		
2	удовлетворительно		
1	плохо	D3	C4D3
0	очень плохо	D2	C4D2
Рабочие места ( + )			
50 человек и более	отлично	D2	C5D2
от 40 человек	хорошо	D1	C5D1
от 30 человек	удовлетворительно		
от 20 человек	плохо		
менее 20 человек	очень плохо	D3	C5D3
Раскол общины ( - )			
Значения критерия С6 оцениваются качественно (экспертами).	очень сильно		
	сильно	D1, D2	C6D1, C6D2
	средне		
	слабо	D3	C6D3
	очень слабо		

# Значения критериев

Критерий	оценки	Альтернативы	Дуга
Изменение стиля жизни ( – )			
Значения критерия С7 оцениваются качественно (экспертами).	очень сильно		
	сильно	D1, D2	C7D1, C7D2
	средне		
	слабо		
	очень слабо	D3	C7D3
Загрязнение воды ( – )			
Значения критерия С8 не приводятся, но измеряется количественно.	очень сильно		
	сильно	D1, D3	C8D1, C8D3
	средне		
	слабо	D2	C8D2
	очень слабо		
Загазованность воздуха ( – )			
Значения критерия С9 не приводятся, но измеряется количественно.	очень сильно		
	сильно	D1	C9D1
	средне	D2	C9D2
	слабо	D3	C9D3
	очень слабо		

# Значения лингвистических переменных

Лингвистические  
переменные для оценок

Лингвистическая переменная		$\mu_A(u)$
отлично	очень сильно	1
хорошо	сильно	0.75
удовлетворительно	средне	0.5
плохо	слабо	0.25
очень плохо	очень слабо	0

Лингвистические  
переменные для  
определения  
сравнительной  
важности критериев

Лингвистическая переменная	$\mu_A(u)$
А,В одинаково важны	1
А важнее В	2
А существенно важнее В	3
А значительно важнее В	4
А несравненно важнее В	5

# Сравнение критериев по важности

Группа критериев	Дуга	Оценка
экономический	AB1	очень важно
социальный	AB2	важно
экологический	AB3	имеет некоторое значение

Дуги	AB1	AB2	AB3	Σ по строке	веса дуг
AB1	1	2	4	7	0.54
AB2	1/2	1	3	4.5	0.35
AB3	1/4	1/3	1	1.58	0.11
Общая сумма				13.08	1.00

Дуги	B1C1	B1C2	B1C3	B1C4	Σ по строке	веса дуг
B1C1	1	1	4	5	11	0.38
B1C2	1	1	4	5	11	0.38
B1C3	1/4	1/4	1	4	5.5	0.19
B1C4	1/5	1/5	1/4	1	1.65	0.05
Общая сумма					29.25	

Используются лингвистические переменные для сравнительной оценки важности критериев (1 – 5)

Дуги	B2C5	B2C6	B2C7	Σ по строке	веса дуг
B2C5	1	4	2	7	0.60
B2C6	1/4	1	1	2.25	0.19
B2C7	1/2	1	1	2.5	0.21
Общая сумма				11.75	

Дуги	B2C5	B2C6	Σ по строке	веса дуг
B3C8	1	4	5	0.8
B3C9	1/4	1	1.25	0.2
Общая сумма			6.25	



## Расчет весов дуг предпоследнего уровня

Веса приоритетов второго уровня в графе принятия решений являются уточнением влияния соответствующих факторов на принятый решений. Но они представляют интерес только с учетом весов первого уровня. Для нахождения весов путей, состоящих из 1-го и 2-го уровня, надо умножить вес дуги первого уровня на веса примыкающих к ней дуг второго уровня:

$$\pi (AB1C1) = \pi (AB1) \times \pi (B1C1) = 0.54 \times 0.38 = 0.21$$

$$\pi (AB1C2) = \pi (AB1) \times \pi (B1C2) = 0.54 \times 0.38 = 0.21$$

$$\pi (AB1C3) = \pi (AB1) \times \pi (B1C3) = 0.54 \times 0.19 = 0.10$$

$$\pi (AB1C4) = \pi (AB1) \times \pi (B1C4) = 0.54 \times 0.05 = 0.03$$

$$\pi (AB2C5) = \pi (AB2) \times \pi (B2C5) = 0.35 \times 0.60 = 0.21$$

$$\pi (AB2C6) = \pi (AB2) \times \pi (B2C6) = 0.35 \times 0.19 = 0.07$$

$$\pi (AB2C7) = \pi (AB2) \times \pi (B2C7) = 0.35 \times 0.21 = 0.07$$

$$\pi (AB3C8) = \pi (AB3) \times \pi (B3C8) = 0.11 \times 0.80 = 0.09$$

$$\pi (AB3C9) = \pi (AB3) \times \pi (B3C9) = 0.11 \times 0.20 = 0.02$$

## Расчет весов дуг последнего уровня

$$\begin{bmatrix} 1.00 & 0.25 & 1.00 & 1.00 & 0.75 & -0.75 & -0.75 & -0.75 & -0.75 \\ 0.75 & 0.00 & 0.75 & 0.00 & 1.00 & -0.75 & -0.75 & -0.25 & -0.50 \\ 0.25 & 1.00 & 0.00 & 0.25 & 0.00 & -0.25 & 0.00 & -0.75 & -0.25 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.21 \\ 0.21 \\ 0.10 \\ 0.03 \\ 0.21 \\ 0.07 \\ 0.07 \\ 0.09 \\ 0.02 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.36 \\ 0.31 \\ 0.18 \end{bmatrix}$$

Окончательный расчет показывает, что решения ранжируются следующим образом: D1(мост) > D2(туннель) > D3(паром).